第6講　円

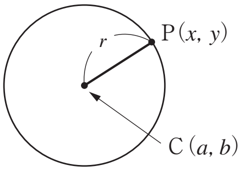
§1 ▶ 円の方程式

要点整理 と 公式

要点1 円の方程式

中心C，半径 r の円は，$CP = r$ を満たす点P全体の集合である。

このことを用いて，円を表す方程式(円の方程式)を求める。



中心 $C(a,\ b)$，半径が r の円の円上の点を $P\ (x,\ y)$ とすると

$$CP = r \quad \text{かつ} \quad CP = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \text{ より}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

両辺2乗すると，$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ が得られる。

これが，中心 $C\ (a,\ b)$，半径 r の円上の点が満たすべき方程式である。

■ **円の方程式**

点 $(a,\ b)$ を中心とする半径が r の円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は　$x^2 + y^2 = r^2$

(ex)　$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ は，中心が点　　　　　，半径が　　　　　の円を表す。

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ より　　$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

ここで $-2a = l$，$-2b = m$，$a^2 + b^2 - r^2 = n$ とおくと

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

と表される。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

逆にこの形で表された方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形に変形したとき，

　$k>0$ ならば 中心が点$(a,\ b)$，半径が$\sqrt{k}$ の円

　$k=0$ ならば 点$(a,\ b)$

を表し，$k<0$ ならば，この方程式が表す図形はない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

（1）　中心が点（1，-1）で，半径が 2

（2）　中心が原点で，（3，-4）を通る

（3）　3 点（0，2），（6，0），（7，3）を通る

［2］　方程式 $x^2+y^2+4x-8y+17=0$ はどのような図形を表すか。

Point Pickup

円の方程式

点（a，b）中心　半径 r の円の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

原点中心　半径 r の円の方程式は　$x^2+y^2=r^2$

円の方程式の決定（通る3 点から）

求める円の方程式を $x^2+y^2+\quad x+\quad y+\quad=0$ とおき，通る点の座標を代入して

できた 3 つの方程式を「連立方程式」として解く。

方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

x，y それぞれについて「平方完成」し，$(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形にする。

「　　　　」ならば　中心（a，b），半径が $\sqrt{k}$ の円を表す。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 円と直線の共有点の座標と個数

要点整理 と 公式

要点❷ 円と直線の共有点の座標

円と直線の共有点の座標は，円と直線の方程式を「連立」させて解くことによって求めることができる。

(ex) 円 $x^2+y^2=25$ と，直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求める。

$x^2+y^2=25$ … ①，　$y=x+1$ … ②　とする。

②を①に代入して $x^2+(x+1)^2=25$

$2x^2+2x-24=0$　　$x^2+x-12=0$

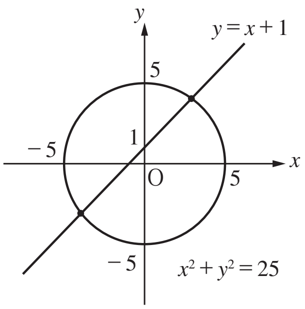
$(x-3)(x+4)=0$　　よって $x=3,\ -4$

このとき「　　」より

$x=3$ のとき　$y=4$

$x=-4$ のとき $y=-3$

よって，共有点の座標は $(3,\ 4)$，$(-4,\ -3)$



要点❸ 円と直線の共有点の個数

円の方程式と直線の方程式を連立させ，y を消去して得られる x の２次方程式

$ax^2+bx+c=0$ … ①

について，その「　　　　」が共有点の x 座標となる。

よって，①の実数解の個数が，共有点の個数となる。

この方程式の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，共有点の個数は以下のようになる。

■ 円と直線の共有点の個数

円と直線の方程式を連立させ，１つの文字を消去して得られる２次方程式の判別式をDとすると

$D>0 \iff$ 円と直線の共有点２個

$D=0 \iff$ 円と直線の共有点１個

$D<0 \iff$ 円と直線の共有点０個(共有点なし)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の円と直線の共有点の個数を求めよ。また，共有点がある場合はその座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=5$，$y=2x-5$

(2)　$x^2+y^2=2$，$y=-2x+1$

(3)　$x^2+y^2=8$，$y=x+6$

Point Pickup

円と直線の共有点

円 C と直線 l の共有点の座標

$\Longrightarrow$　直線 l の式を $y=mx+n$ の形にし，円 C の式に代入して y を消去

得られる2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ … ① の「実数解」が，

円と直線の共有点の x 座標。

この実数解を，「直線 l」の式に代入し，共有点の y 座標を求める。

2次方程式①の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　共有点2個

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　共有点1個

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　共有点0個(共有点なし)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 円と直線の位置関係

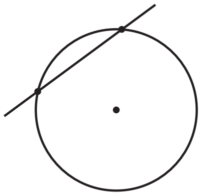
要点整理 と 公式

要点4 円と直線の位置関係

円と直線の共有点の個数は，円と直線の方程式から y を消去して得られる2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D の符号によって求めることができる。

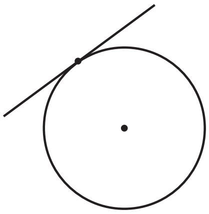
この D の符号と共有点の個数，円と直線の位置関係は以下のようになる。

「$D>0$」 共有点2個



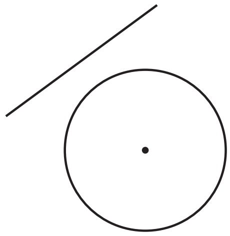
「異なる2点で交わる」

「$D=0$」 共有点1個



「 接する 」

「$D<0$」 共有点0個

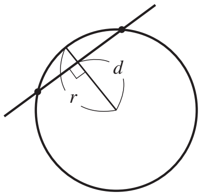


「共有点をもたない」

要点5 円と直線の位置関係（点と直線の距離から）

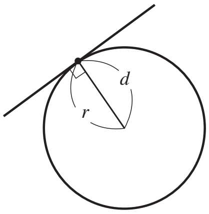
円と直線の位置関係について，円の中心と直線との距離を d，円の半径を r とすると，d と r の大小により以下のようになる。

「　　　　」



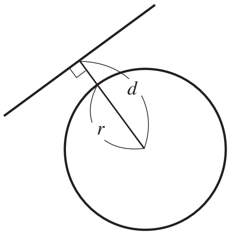
「異なる2点で交わる」

「　　　　」



「 接する 」

「　　　　」



「共有点をもたない」

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ex) 円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=-x+1$ について

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $x+y-1=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1\cdot0+1\cdot0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

円の半径 r は $r=5$

よって $d<r$ より，この円と直線は異なる2点で交わる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

円 $C : x^2 + y^2 = 5$ と直線 $l : y = x + k$ について，次の問いに答えよ。

(1)　円 C と直線 l が異なる2点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　円 C と直線 l が接するとき，定数 k の値を求めよ。

Point Pickup

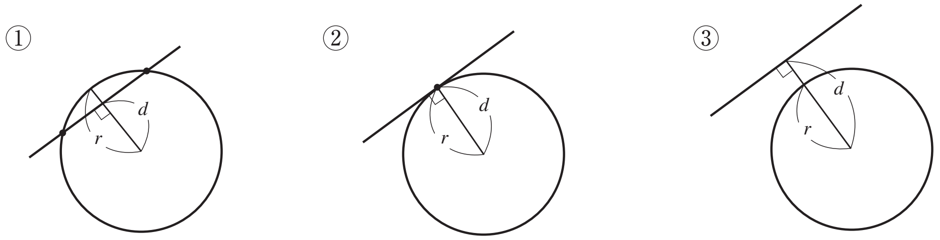
円と直線の位置関係

円と直線を連立して得られる2次方程式の判別式を D とすると

① 異なる2点で交わる $\iff$ $D > 0$
② 接する $\iff$ $D = 0$
（①②）共有点をもつ $\iff$ $D \geqq 0$
③ 共有点をもたない $\iff$ $D < 0$

円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると

① 異なる2点で交わる $\iff$ $d < r$
② 接する $\iff$ $d = r$
（①②）共有点をもつ $\iff$ $d \leqq r$
③ 共有点をもたない $\iff$ $d > r$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

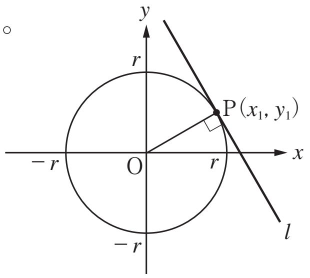
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 円の接線

要点整理 と 公式

要点6 円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点P $(x_1,\ y_1)$ における接線 l の方程式を求める。

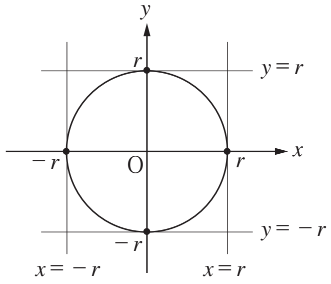


点Pが座標軸上にないとき，直線OPの傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ である。

OP⊥ l であることから，接線 l の方程式は

$$y=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1 \qquad \text{すなわち} \quad x_1x+y_1y=x_1{}^2+y_1{}^2$$

P $(x_1,\ y_1)$ は円上の点であることより　$x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$



よって 接線 l の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$ である。

この式は，点Pが座標軸上にある場合も成り立つ。

■ **円上の点における接線の方程式**

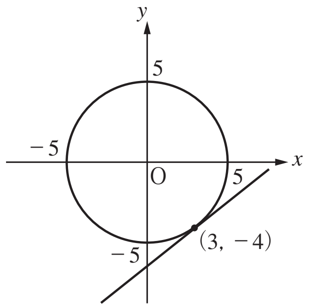
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

(ex) 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ -4)$ における接線の方程式は

x +　　　$y=25$

つまり $3x-4y=25$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P $(2,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 A$(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

Point Pickup

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$x_1x+y_1y=r^2$

円外の点から引いた接線の方程式

①　接点の座標を $(a,\ b)$ とおき，点 $(a,\ b)$ における接線の方程式を求める。
　　接線が満たすべき条件を反映させ，a と b の関係式を作る。

②　点 $(a,\ b)$ は円上の点であることから，円の方程式に代入すると，
　　a と b の関係式が得られる。

③　①と②を連立させ，a と b を求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　確認テスト

1 中心が点$(2,\ 3)$，半径が2の円の方程式は$(x-$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2=$ ウ である。
また，方程式$x^2+y^2-4x-6y-12=0$は中心が点(エ ，オ)，半径 カ の円を表す。

2 円$x^2+y^2=5$と直線$y=x-1$の共有点の座標は(キ ，ク)，$(-$ ケ ，$-$ コ)である。

3 (1) 円$x^2+y^2=25$上の点$(4,\ 3)$における接線の方程式は サ $x+$ シ $y=25$ である。

(2) 点$(1,\ 5)$から円$x^2+y^2=13$に引いた接線の方程式は ス $x+$ セ $y=13$と
$-$ ソ $x+$ タ $y=13$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　円

1

［1］（1）$(x-1)^2+(y+1)^2=4$

（2）半径は $\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$　　よって $x^2+y^2=25$

（3）求める円の方程式を　$x^2+y^2+lx+my+n=0$　とおく。

3 点(0，2)，(6，0)，(7，3) を通るので

$$\begin{cases} 4+2m+n=0 \\ 36+6l+n=0 \\ 49+9+7l+3m+n=0 \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} 2m+n=-4 & \cdots① \\ 6l+n=-36 & \cdots② \\ 7l+3m+n=-58 & \cdots③ \end{cases}$$

①−② より　$2m-6l=32$　　　$-3l+m=16$ …④

②−③より　$-l-3m=22$ … ⑤

④，⑤より　$l=-7$，$m=-5$　　　このとき①より $n=6$

よって求める円の方程式は　$x^2+y^2-7x-5y+6=0$

［2］$x^2+y^2+4x-8y+17=0$

$(x+2)^2-4+(y-4)^2-16+17=0$

$(x+2)^2+(y-4)^2=3$

よって，中心(−2，4)，半径 $\sqrt{3}$ の円を表す。

2

（1）$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots① \\ y=2x-5 & \cdots② \end{cases}$

②を①に代入して $x^2+(2x-5)^2=5$

$5x^2-20x+20=0$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$　　$x=2$　　このとき ②より　$y=-1$

よって，共有点の個数は 1 個　　その座標は (2，−1)

（2）$\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots① \\ y=-2x+1 & \cdots② \end{cases}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

②を①に代入して　$x^2+(-2x+1)^2=2$

$5x^2-4x-1=0$

$(5x+1)(x-1)=0$　　よって　$x=-\dfrac{1}{5},\ 1$

このとき②より

$x=-\dfrac{1}{5}$　のとき　$y=\dfrac{7}{5}$　　　$x=1$　のとき　$y=-1$

よって，共有点の個数は 2 個　　　その座標は $\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$，$(1,\ -1)$

(3)　$\begin{cases} x^2+y^2=8 \cdots ① \\ y=x+6 \cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(x+6)^2=8$

$2x^2+12x+28=0$

$x^2+6x+14=0$

この方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=3^2-1\cdot 14=-5<0$

よって，共有点の個数は 0 個

3

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \cdots ① \\ y=x+k \cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して $x^2+(x+k)^2=5$

x について整理すると　$2x^2+2kx+k^2-5=0 \cdots ③$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=k^2-2\cdot(k^2-5)=-k^2+10$

(1)　円 C と直線 l が異なる 2 点で交わるのは　$D>0$　のとき

よって　$-k^2+10>0$　　　$k^2<10$

したがって　$-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

(2)　円 C と直線 l が接するのは $D=0$ のとき

よって　$-k^2+10=0$　　　$k^2=10$

したがって　$k=\pm\sqrt{10}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

（別解）　円 C の半径 r は $r=\sqrt{5}$

円 C の中心(0，0)と直線 $l：x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1\cdot0-1\cdot0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

(1)　円 C と直線 l が異なる 2 点で交わるのは $d<r$ のとき

よって $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{5}$　　$|k|<\sqrt{10}$

したがって $-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

(2)　円 C と直線 l が接するのは $d=r$ のとき

よって $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$　　$|k|=\sqrt{10}$

したがって　$k=\pm\sqrt{10}$

4

(1)　公式より $2\cdot x+1\cdot y=5$　よって　$2x+y=5$

(2)　接点を点 P $(a,\ b)$とする。

点 P における接線の方程式は　$ax+by=5$ … ①

これが点 A(3，1)を通るので，$3a+b=5$ … ②

また，点 P は円上の点より　$a^2+b^2=5$ … ③

②より $b=-3a+5$ … ②′　これを③に代入して

$a^2+(-3a+5)^2=5$　　$10a^2-30a+20=0$

$a^2-3a+2=0$　　$(a-1)(a-2)=0$　　よって　$a=1,\ 2$

②′ より　$a=1$ のとき　$b=2$　　このとき①より　$x+2y=5$

$a=2$ のとき　$b=-1$　このとき①より　$2x-y=5$

よって，求める接線の方程式と接点の座標は

接線の方程式　$x+2y=5$　　接点の座標 $(1,\ 2)$

接線の方程式　$2x-y=5$　　接点の座標 $(2,\ -1)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　確認テスト

1 中心が点(2, 3)，半径が 2 の円の方程式は $(x-$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2=$ ウ である。
また，方程式 $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ は中心が点(エ ， オ)，半径 カ の円を表す。

2 円 $x^2+y^2=5$ と 直線 $y=x-1$ の共有点の座標は (キ ， ク)，(− ケ ， − コ) である。

3 (1) 円 $x^2+y^2=25$上の点(4, 3)における接線の方程式は サ $x+$ シ $y=25$ である。

(2) 点(1, 5)から円 $x^2+y^2=13$に引いた接線の方程式は ス $x+$ セ $y=13$と − ソ $x+$ タ $y=13$ である。

{ 解答 }

1 ア 2　イ 3　ウ 4　エ 2　オ 3　カ 5

2 キ 2　ク 1　ケ 1　コ 2

3 (1) サ 4　シ 3

(2) ス 3　セ 2　ソ 2　タ 3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。